

ЦИТИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Баскин Л.М., 2009. Северный олень. Управление поведением и популяциями. Оленеводство. Охота. М.: Товарищество научных изданий КМК. 284 с.
2. Башмакова И.Г., 2007. Диофант и диофантовы уравнения. М.: ЛКИ. 72 с.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А., 1984. Матрицы и вычисления. М.: Наука. 320 с.
4. Гантмахер Ф. Р., 1967. Теория матриц. М.: Наука. 576 с.
5. Жмылев П.Ю., Алексеев Ю.Е., Карпухина Е.А., Баландин С.А., 2005. Биоморфология растений: иллюстрированный словарь. Учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МГУ. 256 с.
6. Казанцева Е.С., Онищенко В.Г., Кипкеев А.М., 2016. Возраст первого цветения травянистых альпийских малолетников Северо-Западного Кавказа // Бюллетень МОИП. Сер. Биология. Т. 121. № 2. С. 73–80.
7. Клочкова И. Н., 2004. Обобщение теоремы о репродуктивном потенциале для матриц Логофета // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. № 3. С. 45 – 48.
8. Корн Г., Корн Т., 1974. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 831 с.
9. Логофет Д.О., 1989. О неразложимости и импрimitивности неотрицательных матриц блочной структуры // Доклады АН СССР. Математика. Т. 308. № 1. С. 46–49.
10. Логофет Д.О., 1991. К теории матричных моделей динамики популяций с возрастной и дополнительной структурами // Журн. общ. биологии. Т. 52. № 6. С. 793–804.
11. Логофет Д.О., 2002. Три источника и три составные части формализма популяции с дискретной стадийной и возрастной структурами // Матем. моделирование. Т. 14. № 12. С. 11–22.
12. Логофет Д.О., Клочкова И. Н., 2002. Математика модели Лефковича: репродуктивный потенциал и асимптотические циклы // Матем. моделирование. Т. 14. № 10. С. 116–126.
13. Логофет Д.О., Белова И.Н., 2007. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 13. № 4. С. 145–164.
14. Логофет Д.О., Уланова Н.Г., Белова И.Н., 2011. Две парадигмы математической популяционной биологии. Попытка синтеза // Журн. общ. биологии. Т. 72. № 5. С. 369–387.
15. Логофет Д.О., Уланова Н.Г., Белова И.Н., 2015. Поливариантный онтогенез у вейников: новые модели и новые открытия // Журн. общ. биологии. Т. 76. № 6. С. 438–460.

16. Логофет Д.О., Белова И.Н., Казанцева Е. С., Онищенко В. Г., 2016а. Ценопопуляция незабудочника кавказского (*Eritrichium caucasicum*) как объект математического моделирования. I. Граф жизненного цикла и неавтономная матричная модель // Журн. общ. биологии. Т. 77. № 2. С. 106–121.
17. Логофет Д.О., Уланова Н.Г., Белова И.Н., 2016б. От неопределенности к числу: развитие метода оценки приспособленности клonalного вида с поливариантным онтогенезом // Журн. общ. биологии. Т. 77. № 6. С. 379–396.
18. Логофет Д.О., Казанцева Е. С., Белова И.Н., Онищенко В. Г., 2017а. Ценопопуляция незабудочника кавказского (*Eritrichium caucasicum*) как объект математического моделирования. II. Сколько лет живет малолетник? // Журн. общ. биологии. Т. 78. № 1. С. 56–66.
19. Логофет Д.О., Казанцева Е. С., Белова И.Н., Онищенко В. Г., 2017б. Сколько лет живет альпийский малолетник? Модельный подход // Журн. общ. биологии. Т. 78. № 5. С. 63–80.
20. Романов М.С., Мастеров В.Б., 2008. Матричная модель популяции белоплечего орлана *Haliaeetus pelagicus* на Сахалине // Математическая биология и биоинформатика. Т. 3. № 2. С. 36–49. [http://www.matbio.org/downloads/Romanov2008\(3_36\).pdf](http://www.matbio.org/downloads/Romanov2008(3_36).pdf)
21. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О., 1978. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука. 1978.
22. Уланова Н.Г., 1995. *Calamagrostis epigeios* // Биологическая флора Московской области / Под ред. Павлова В.Н., Тихомирова В.Н. М.: Изд-во МГУ. Вып. 10. С. 4–19.
23. Уланова Н.Г., Жуковская О.В., Куксина Н.В., Демидова А.Н., 2005. Структура и динамика популяции бересы бородавчатой (*Betula pendula* Roth.) в наземновейниковых фитоценозах сплошных вырубок ельников Костромской области // Бюл. Моск. о-ва испытателей природы. Отд. биол. Т. 110. вып. 5. С. 27–35.
24. Уланова Н.Г., Клочкива И.Н., Демидова А.Н., 2007. Моделирование популяционной динамики *Calamagrostis epigeios* (L.) Roth при зарастании вырубки ельника сложного // Сибирский ботан. вестник: электронный журнал. Т. 2. Вып. 2. С. 91–96. <http://www.csbg.nsc.ru/uploads/journal.csbg.ru/pdfs/i3.pdf>
25. Уланова Н.Г., Белова И.Н., Логофет Д.О., 2008. О конкуренции среди популяций с дискретной структурой: динамика популяций вейника и бересы, растущих совместно // Журн. общ. биологии. Т. 69. С. 478–494.
26. Чекановская О.В., 1960. Дождевые черви и почвообразование. М., Л.: Издательство Академии наук СССР. 206 с.
27. Четени А.И., 1988. Матричная модель популяции северных оленей с учетом экофизиологических показателей / Препринт. М.: ВЦ АН СССР. 37 с.
28. Bernardelli H., 1941. Population waves // J. Burma Research Soc. Vol. 31. P. 1–18.

29. Cushing J.M., Yicang Z., 1994. The net reproductive value and stability in matrix population models // *Nat. Res. Model.* V. 8. P. 297–333.
30. Horn R. A., Johnson C. R., 1990. *Matrix Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
31. Keyfitz N., 1968. *Introduction to the Mathematics of Population* // Reading, MA: Addison-Wesley.
32. Keyfitz N., 1977. *Applied Mathematical Demography* // New York, NY: Wiley.
33. Lefkovitch L. P., 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages // *Biometrics*. Vol. 21. P. 1–18.
34. Law R., 1983. A model for the dynamics of a plant population containing individuals classified by age and size // *Ecology*. V. 64. P. 224–230.
35. Leslie P. H., 1945. On the use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. Vol. 33. P. 183–212.
36. Leslie P. H., 1948. Some further notes on the use of matrices in population mathematics // *Biometrika*. Vol. 35. P. 213–245.
37. Lewis E.G. 1942. On the generation and growth of a population // *Sankhya: Indian J. Statistics*. Vol. 6. P. 93–96.
38. Li C.-K., Schneider H., 2002. Application of Perron–Frobenius theory to population dynamics // *J. Math. Biol.* V. 44. P. 450–462.
39. Logofet D.O., 1993. *Matrices and Graphs: Stability Problems in Mathematical Ecology*. Boca Raton, FL: CRC Press. 1993. 308pp.
40. Logofet D.O., 2008. Convexity in projection matrices: Projection to a calibration problem // *Ecological Modelling*. V. 216. P. 217–228.
41. Logofet, D.O., 2013. Projection matrices in variable environments: λ_1 in theory and practice. *Ecological Modelling*. Vol. 188. P. 30–40.
42. Lopes C., P'ery A.R.R., Chaumot A., Charles S., 2005. Ecotoxicology and population dynamics: Using DEBtox models in a Leslie modeling approach // *Ecological Modelling*. Vol. 251. P. 307–311.
43. Protasov V.Yu., Logofet D.O., 2014. Rank-one corrections of nonnegative matrices, with an application to matrix population models // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* Vol. 35, No. 2, pp. 749–764.
44. Tveraa T., Fauchald P., Henaug C. et al., 2003. An examination of a compensatory relationship between food limitation and predation in semi-domestic reindeer // *Oecologia*. V. 137. P. 370–376.
45. Ulanova N.G., 2000. Plant age stages during succession in woodland clearings in Central Russia // *Vegetation science in retrospect and perspective*. Uppsala: Opulus. P. 80–83.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрицы и графы (сведения из математики)

Основным способом рассуждений в математике (за редким исключением¹⁾) выступает дедукция, т.е. движение от общего к частному. Потому и формальные определения математики дают в наиболее общей форме, а иллюстрируют более частными примерами.

§П.1. Что такое матрица, вектор, скаляр

Матрицы

Определение 1. Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из элементов некоторой оговоренной природы (числа, знаки, символы и т. п.); элементы расположены в m строках и n столбцах таблицы, которые занумерованы натуральными числами

$i = 1, 2, \dots, m-1, m$ и $j = 1, 2, \dots, n-1, n$
слева направо и сверху вниз соответственно. \square

Размер, или размерность, $m \times n$ означает, что у матрицы m строк и n столбцов. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, – для указания размерности тогда достаточно одного параметра: *квадратная матрица m -го порядка*. Именно такие матрицы мы рассматриваем в данном пособии, и атрибут *квадратная* часто будет опускаться.

Стандартное обозначение матрицы через ее элементы,

$$A = [a_{ij}], \quad (\text{П1.1})$$

отражает соглашение²⁾ обозначать матрицы прописными буквами латинского алфавита (в данном пособии – еще и *полужирным* шрифтом и предпочтение отдается букве L), а их элементы – одноименными строчными буквами с парой нижних индексов: первый индекс, i , указывает номер строки, а второй, j , – номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент. Например, запись « a_{2k} » или «элемент $(2, k)$ » означает k -ый слева элемент второй сверху строки. При этом сам элемент не обязан нести в своем имени такие указания на его местоположение, хотя это часто бывает удобно в математических выкладках. Если имя матрицы содержит индекс или какой-либо еще

¹⁾ Исключением является метод полной математической индукции.

²⁾ В некоторых руководствах используют круглые скобки.

значок, то обычно он означает модификацию либо количественный вариант исходной матрицы.

Пример П1.

a) Квадратная матрица 2-го порядка

$$S = \begin{bmatrix} 0 & + \\ - & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П1.2})$$

показывает качественный характер внутри- и межвидовых отношений в классической системе Лотки–Вольтерра как модели сообщества хищник–жертва: $s_{11} = s_{22} = 0$ означает отсутствие внутривидового регулирования; $s_{12} = +$ указывает на увеличение скорости роста популяции хищника в ответ на прирост популяции жертвы; $s_{21} = -$ указывает на противоположное влияние хищника на популяцию жертвы.

b) Матрица 3-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} 0.8147 & 0.9134 & 0.2785 \\ 0.9058 & 0.6324 & 0.5469 \\ 0.1270 & 0.0975 & 0.9575 \end{bmatrix} \quad (\text{П1.3})$$

получена в среде MATLAB в результате однократного выполнения команды *rand(3)* – выборки 9 псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, и представления их (с точностью до четвертого знака после десятичной точки) в форме матрицы 3×3 . Видим, например, что $a_{23} = 0.5469$; $a_{33} = 0.9575$; a_{51} не определено. \square

Примечание. В математических выкладках, где участвуют величины с индексами, второй индекс обычно ставится просто рядом с первым, как показано выше, но это может привести к двусмысленности, когда один из индексов представляет собой арифметическое выражение. Тогда используйте запятую, чтобы отделить первый индекс от второго и исключить неоднозначное толкование (см. Упражнение 2). \square

Какие именно буквы использовать в обозначении матриц и индексов решает автор – важно следить за тем, чтобы обозначения из разных мест одной рукописи были единообразны и не конфликтовали друг с другом.

Векторы

В учебниках математики *векторы* определяются как элементы *векторных пространств*, в которых выполнен ряд математических аксиом. Для целей данного пособия достаточно определить вектор как частный случай матрицы, но не забывать, что векторы образуют *линейные пространства* (см. ниже).

Определение 2. Матрица размера $1 \times n$ или $n \times 1$ называется *вектором* – точнее, *вектором-строкой*, когда состоит из одной строки, или *вектором-столбцом*, когда из одного столбца. \square

ственный вариант

(П1.2)

отношений в классах хищник–жертва:
занятия; $s_{12} = +$ указывает на прирост
в ответ на прирост
влияние хищника

(П1.3)

полнения команды
распределенных на
ергого знака после
р, что $a_{23} = 0.5469$;

ют величины с ин-
циальным, как показа-
а один из индексов
пользуйте запятую,
однозначное толко-

риц и индексов ре-
разных мест одной
другом.

лементы векторных
аксиом. Для целей
кий случай матрицы,
чества (см. ниже).
ется вектором – точ-
ли вектором-столб-

Запись

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3], \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_5]^T \quad (\text{П1.4})$$

означает, что вектор-строка \mathbf{x} состоит из трех компонент x_1, x_2, x_3 (прежних «элементов матрицы»), а вектор-столбец \mathbf{y} – из пяти компонент y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 . Строку $[y_1, \dots, y_5]$ превратила в столбец операция *транспонирования*, символ которой T находится справа от строки в позиции верхнего индекса. Аналогично определяют и обозначают транспонированную матрицу. Ясно, что $(A^T)^T = A$ для любой матрицы A , и это часто используют в алгебраических выкладках.

Запись (П1.4) иллюстрирует конвенцию по обозначениям: векторы – это строчные латинские буквы полужирным *курсивом*, их компоненты – однотипные буквы светлым курсивом с номером компоненты на месте нижнего индекса.

Скаляры

Определение 3. Матрица размера 1×1 , или вектор из одной компоненты, называется *скаляром*.

Как альтернативу числу или компоненте, «скалляр» употребляют, чтобы подчеркнуть невекторную природу объекта.

Упражнения

1. Записать вектор размера 7×1 , первая компонента которого равна 1, а остальные представляют собой члены:
 - а) арифметической прогрессии с разностью 1;
 - б) геометрической прогрессии с показателем $\frac{1}{2}$.
2. Записать вектор \mathbf{x} размера $1 \times n$, у которого:
 - а) все нечетные компоненты равны номеру компоненты, а все четные – нулю;
 - б) наоборот.

§П.2. Арифметические операции с матрицами и векторами

Сложение и умножение на число

выполняется с матрицами так же, как и с обычными числами, *поэлементно*, т.е. с каждым из n^2 элементов результата операции с матрицами или с каждой из n компонент результата операции с векторами. Например, если $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ – это матрицы одного размера, а c – любое число, то матрицы $A + B$ и cA суть

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], cA = [ca_{ij}]. \quad (\text{П2.1})$$

Разумеется, $A - A = [a_{ij} - a_{ij}] = [0_{ij}] = \mathbf{0}$, и если $c \neq 0$, то $A/c = [a_{ij}/c]$.

Из этих очевидных наблюдений математики делают вывод что все матрицы одного размера (в частности, векторы) образуют *линейное пространство*: результат *линейной операции* (т.е. сложения/вычитания матриц или/и умножения матрицы на число) представляет собой матрицу того же размера, т.е. не выходит из заданного пространства. Оно обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$, когда элементами пространства выступают матрицы размера $m \times n$, и \mathbb{R}^n , когда векторы размерности n .

Особую роль в приложениях играет специальное подмножество пространства \mathbb{R}^n – так называемый *положительный конус* (иногда говорят, *положительный ортан*), обозначаемый $\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$. Вектор x принадлежит ортанту \mathbb{R}_+^n (формально $x \in \mathbb{R}_+^n$), если и только если все компоненты вектора неотрицательны (формально $x_j \geq 0 \forall j = 1, 2, \dots, n$); в конусе сохраняются только результаты сложения векторов и умножения вектора на любое положительное число. По «правилу параллелограмма» мы складывали векторы (на плоскости) еще в школьном курсе физики и, умножая вектор на число, растягивали или сжимали его по длине, сохраняя по направлению.

Скалярное произведение векторов

– это еще одна операция над векторами из \mathbb{R}^n – обозначим их как $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, – которую определяют как

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (\text{П2.2})$$

Из определения (П2.2)³⁾ видно, что результат скалярного произведения векторов действительно представляет собою скаляр.

Скалярное произведение участвует в одном из определений *нормы вектора*, $\|x\|$:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad (\text{П2.5})$$

– и (*евклидова*) *расстояния* между векторами x и y в пространстве \mathbb{R}^n как нормы их разности $\|x - y\|$:

$$\|x - y\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2. \quad (\text{П2.6})$$

Если множество (\mathbb{C}) комплексных чисел вида $a + ib$ рассматривать как множество точек на комплексной плоскости, то *абсолютная величина*, или *модуль*, комплексного числа есть норма вектора $[a, b]$, соединяющего точку с началом координат:

$$|a + ib| = \|[a, b]\| = a^2 + b^2. \quad (\text{П2.7})$$

³⁾ В некоторых руководствах используют круглые скобки вместо треугольных.

(П2.1)

$$c = [a_{ij}/c].$$

од что все матри-

ре пространство:

матриц или/и умно-

ю же размера, т.е.

$$\mathbb{R}^{m \times n}$$

, когда эле-

$$\mathbb{R}^n$$

, когда векторы

простран-

говорят, положи-

надлежит ортанту

вектора неотри-

хранияются только

ое положительное

екторы (на плоско-

щем, растягивали

ся вправо

и влево

и вверх

и вниз

и вправо

и влево

и вверх

и вниз

рами), причем это преобразование *линейно* (оператор *линеен*) – см. Упражнение 13.

Упражнения

3. Вычислить линейную комбинацию матриц $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ с коэффициентами a и b , т.е. определить выражение для матрицы $aA + bB$.
4. Вычислить линейную комбинацию векторов $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ и $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ с коэффициентами a и b , т.е. определить выражение для вектора $ax + by$.
5. Убедиться, что матрица S (П1.2) коммутирует в произведении с транспонированной, т.е. проверить равенство $SS^T = S^TS$.
6. Используя матрицу A (П1.3), записать выборку 9 псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$.
7. Записать результат скалярного произведения векторов (П2.2) в виде произведения матриц подходящего размера.

§П.3. Определитель матрицы и решение системы линейных алгебраических уравнений (обратная матрица)

Определитель квадратной матрицы A обозначается $\det A$ (реже $|A|$) и является важнейшей числовой характеристикой матрицы: условие обратимости, аналогичное $a \neq 0$ из предыдущего параграфа, выглядит для матриц как

$$\det A \neq 0. \quad (\text{П3.1})$$

Такая матрица называется *невырожденной* (или *неособенной*), так как имеет *обратную* матрицу A^{-1} аналогичного свойства: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. Выясним на примере, как вычисляется обратная матрица для заданной матрицы A .

Пример П2. Пусть матрица A имеет размер 2×2 и элементы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

и рассмотрим ее как матрицу, составленную из коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11, \\ 4x_1 - x_2 = 15, \end{cases} \quad (\text{П3.2})$$

относительно неизвестных x_1, x_2 и с правой частью в виде вектора-столбца $[11, 15]^T$. Решая систему методом подстановки выражения $x_2 = 4x_1 - 15x_2$ из

второ
т.е. x_1
стоте
неизв

Су
нений
(Math

Согла

уравн
решен
ей мат

Поз
ножит
бец ре

Упра

8.

9.

10.

⁴⁾ Исполь
тексту «М

чек – орн

⁵⁾ В проти

шений, ли

⁶⁾ «Задать»
ые либо

§П.3. Определитель матрицы и решение системы линейных уравнений

второго уравнения в первое, находим $2x_1 + 3(4x_1 - 15) = 11$, откуда $14x_1 = 56$, т.е. $x_1 = 4$, а значит, $x_2 = 1$. Простота этого решения обязана, разумеется, простоте самой системы (П3.2), а в более сложных случаях, с большим числом неизвестных нужные подстановки далеко не очевидны. \square

Существует общий метод решения линейных систем алгебраических уравнений, и с позиции пользователя любой современной системы вычислений (*Mathematica*, *Maple*, *MATLAB*⁴⁾ и др.) метод выглядит следующим образом. Согласно правилу умножения матрицы A на вектор-столбец $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, систему уравнений (П3.2) можно записать в более компактном виде $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix}$, а ее решение – если мы знаем, что матрица A невырожденная⁵⁾, – через обратную ей матрицу, т.е.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П3.3})$$

Поэтому достаточно задать⁶⁾ матрицу A , запросить ее обращение A^{-1} и умножить справа на вектор-столбец правой части, чтобы получить вектор-столбец решений согласно (П3.3).

Упражнения

8. Решить через обращение матрицы несколько систем уравнений, аналогичных (П3.2), относительно: а) трех неизвестных; б) пяти неизвестных, – задавая самостоятельно матрицу A и вектор правой части. Выяснить попутно, как «MatLab» реагирует на запрос: `det(A)`.
9. Задать матрицу A в символьном виде $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ и убедиться, что $\det A = ad - bc = \det A^T$. Проверить тождество: $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} / \det A$. Оно объясняет принципиальную роль условия (П3.1) в существовании обратной матрицы.
10. Вычислить определители $\det A$, $\det B$ и $\det(AB)$ для матриц A и B из Упражнения 3 и убедиться, что

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \quad (\text{П3.4})$$

Тождество (П3.4) справедливо для квадратных матриц любого порядка $n = 1, 2, \dots$

⁴⁾ Использован в данном пособии, но допускает замену на усмотрение читателя. Далее по тексту «MatLab» означает выбранную читателем систему вычислений, а MATLAB без кавычек – оригинальную систему MATLAB.

⁵⁾ В противном случае система линейных уравнений будет иметь либо бесконечно много решений, либо ни одного решения.

⁶⁾ «Задать» означает ввести в «MatLab» имя матрицы (в данном случае ‘A’) и значения (числовые либо символьные) всех ее элементов.

11. Используя тождества (П2.3) и (П3.4), доказать, что $\det I = 1$. Если задана квадратная матрица A , то чему равен определитель $\det(A^{-1})$?
12. С помощью «MatLab» убедиться, что определитель матрицы (1.9) из §1.1 равен нулю.
13. На примере матрицы A из Упражнения 3 (или ином примере по выбору читателя) убедиться, что матричный оператор *линеен* в пространстве \mathbb{R}^2 (соответственно в \mathbb{R}^k , где k – выбор читателя). Это значит, что оператор A переводит линейную комбинацию векторов (см. Упражнение 3) в линейную комбинацию их *образов* с теми же коэффициентами a и b . Формально это определение *линейности* выражается равенством

$$A(ax + by) = aAx + bAy, \quad (\text{П3.5})$$

которое справедливо для любой пары чисел a и b (формально $\forall a, b \in \mathbb{R}$) и любой пары векторов x и y из пространства \mathbb{R}^k (формально $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$).

§П.4. Собственные векторы матрицы и соответствующие им собственные числа

Действуя на вектор x в пространстве \mathbb{R}^n (это действие, или *образ* x , записывается как Ax), матричный оператор A преобразует вектор, как-то поворачивая его и/или растягивая/скжимая по длине. Во втором случае, т.е. когда вектор сохраняет свое прежнее направление, но может измениться по длине, он называется *собственным*. Формально,

Определение 4. Пусть даны квадратная матрица A n -го порядка и *ненулевой*⁷⁾ вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Если $Ax = \lambda x$, где λ – некоторое число (действительное или комплексное, произносится «лямбда»), то $x \neq 0$ называется *собственным вектором (eigenvector)* матрицы A , а λ – ее *собственным числом (или собственным значением, eigenvalue)*, отвечающим собственному вектору x . Множество всех собственных чисел матрицы A называется ее *спектром*. \square

Пример П3. Рассмотрим матрицу

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (\text{П4.1})$$

Согласно *Определению 4*, вектор $v = [v_1, v_2, v_3]^T \neq [0, 0, 0]^T$ является собственным вектором матрицы U , если выполнены условия

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{П4.2})$$

⁷⁾Ненулево́й значит хотя бы одна из компонент не равна 0; обозначается $\neq 0$, где $0 = [0, 0, \dots, 0]$.

§П.4. Собственные векторы матрицы и соответствующие им собственные числа

$\det I = 1$. Если за-
тель $\det(A^{-1})$?
матрицы (1.9) из
примере по выбо-
неен в простран-
). Это значит, что
ров (см. Упраж-
ми же коэффици-
ости выражается

(П3.5)

ально $\forall a, b \in \mathbb{R}$) и
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Матрицы числа

и образ x , записи
как-то поворачи-
е, т.е. когда вектор
по длине, он на-

порядка и *ненулевое*
действительное или
собственным век-
тором (или собствен-
вектору v . Множество
□

(П4.1)

$0]^T$ является соб-

(П4.2)

$\neq 0$, где $0 = [0, 0, \dots, 0]$.

которые сводятся к следующим трем равенствам:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \lambda v_1, \\ v_1 + v_2 + v_3 = \lambda v_2, \\ v_1 + v_2 + v_3 = \lambda v_3. \end{cases} \quad (\text{П4.3})$$

Очевидное решение системы уравнений (П4.3) получается при $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ и $\lambda = 3$ – обозначим это собственное число $\lambda_1 = 3$. Есть ли другие? Могут ли, например, равенства выполняться при нулевом значении левой и правой части? Противопоказаний нет, и это значит, что $\lambda_2 = 0$, например, при $[v_1, v_2, v_3] = [1, 1, -2] \neq 0$ (убедитесь подстановкой в каждое из уравнений (П4.3)). А еще $\lambda_3 = 0$, и $[v_1, v_2, v_3] = [1, -1, 0] \neq 0$. □

Линейная независимость векторов

В Примере П3 найдено три разных собственных вектора – выпишем их в матрицу по столбцам:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П4.4})$$

Ее столбцы, действительно, выглядят по-разному, но в теории матриц есть формальный критерий, чтобы судить о различии нескольких векторов, которое называется *линейной независимостью*.

Критерий 1. Пусть даны n векторов a, b, c, \dots из пространства \mathbb{R}^n . Векторы являются *линейно независимыми*, если и только если составленная из них квадратная матрица V не вырождена, т.е. $\det V \neq 0$. □

В случае (П4.4) $\det V = -6 \neq 0$ и значит, найденные в примере векторы оказались линейно независимыми. Но если бы последний столбец матрицы V выглядел, например, как $[-2, -2, 4]^T$, – непохоже внешне на первые два, – то $\det V = 0$, т.е. векторы были бы *линейно зависимыми*. Это значит, что, решая задачу на собственные векторы матрицы (П4.1), мы не вправе предлагать вектор $[-2, -2, 4]^T$ в качестве *четвертого* найденного решения.

Согласно общей теории, в пространстве \mathbb{R}^n не может быть более n линейно независимых векторов и, соответственно, не может быть более n решений задачи на собственные векторы. На самом деле, их ровно n в большинстве практических случаев, а вот различных собственных значений может быть меньше. У матрицы (П4.1) их всего лишь два: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Но двум нулевым собственным числам соответствуют линейно независимые собственные векторы, и тогда говорят, что *кратность* значения $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ равна двум, т.е. спектр матрицы U есть

$$\Lambda(U) = \{3, 0, 0\}. \quad (\text{П4.5})$$

С учетом кратности собственных чисел, у матрицы $n \times n$ их тоже оказывается ровно n . Фундаментальная причина тому содержится в основной теоре-

ме алгебры многочленов одной переменной, о чем сказано в следующем параграфе.

Левый собственный вектор, или собственный вектор-строка

Обе части (левая и правая) равенства $Av = \lambda v$ из Определения 4 суть векторы-столбцы (после выполнения операций). Но это значит, что то же равенство справедливо и для векторов-строк с теми же компонентами, т.е. для транспонированных частей равенства: $(Av)^T = \lambda v^T$, или (по правилу транспонирования произведения)

$$v^T A^T = \lambda v^T. \quad (\text{П4.6})$$

По правилу умножения «строку на столбец» левая часть равенства (П4.6) дает вектор-строку, и равенство означает, что число λ является собственным и для A^T , транспозита матрицы A . Можно показать, что и для исходной матрицы A найдется вектор-строка, w , такая, что $wA = \lambda w$.

Задачу поиска собственного вектора-строки сводим к поиску собственного вектора-столбца: если у матрицы A^T есть собственный вектор-столбец – обозначим его w^T , – то согласно определению $A^T w^T = \lambda w^T$. Транспонируя обе части равенства, получаем

$$wA = \lambda w, \quad (\text{П4.7})$$

что и требовалось.

Приведенные рассуждения убеждают в том, что, во-первых, спектры матриц A и A^T совпадают, т.е. $\Lambda(A) = \Lambda(A^T)$, и во-вторых, каждому собственному числу λ отвечает вектор-столбец и некоторый вектор-строка. Последний называют *левым* собственным вектором, коль скоро в произведении wA он стоит слева от матрицы A .

Упражнения

14. Почему об одном условии (П4.2) в тексте сказано «если выполнены условия», т.е. как о нескольких условиях? Опечатка или глубокий смысл?
15. Опишите спектр матрицы единицы (П2.4). Каков спектр диагональной матрицы $\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$?
16. Проверить в «MatLab», что все три вектора, составившие матрицу (П4.4), являются собственными для матрицы U (П4.1) и что $\det V = -6$.
17. Функция $\text{abs}(X)$ в среде MATLAB возвращает абсолютную величину аргумента X , который может быть скаляром, вектором или матрицей; в последних двух случаях результат имеет ту же размерность, что и аргумент. Выяснить, какая команда вычисляет абсолютную величину в доступной системе «MatLab».
18. Пару векторов x и y называют *ортогональными*, если их скалярное произведение нулевое: $\langle x, y \rangle = 0$. Показать, что столбцы матрицы

(П4.4) попарно ортогональны. Доказать, что ортогональные векторы линейно независимы. Обратное утверждение неверно, т.е. линейно независимые векторы не обязаны быть ортогональными (показать на примерах).

19. Сколько собственных векторов у матрицы-единицы (П2.4) в пространстве \mathbb{R}^2 ? в \mathbb{R}^k ? Сколько собственных значений (с учетом кратности)?
20. Пусть c – некоторое ненулевое, а m – натуральное число. Доказать, что если λ есть собственное значение матрицы A , а v – соответствующий собственный вектор, то:
 - a) вектор cv тоже является собственным вектором матрицы A с тем же значением λ ;
 - b) $c\lambda$ является собственным значением матрицы cA с тем же собственным вектором v ;
 - c) λ^m является собственным значением матрицы A^m с тем же собственным вектором v .
21. Рассматривая собственное число λ матрицы A как функцию $\lambda(A)$ своего матричного аргумента, показать на примерах, что эта функция не является *аддитивной*, т.е.

$$\lambda(A + B) \neq \lambda(A) + \lambda(B). \quad (\text{П4.5})$$

§П.5. Характеристический многочлен квадратной матрицы

В данном параграфе рассматривается общий метод решения задачи на собственные числа заданной матрицы A порядка $n \times n$. Согласно определению собственного вектора $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ и отвечающего ему собственного значения λ (*Определение 4*), должно выполняться равенство

$$Av = \lambda v \quad (v \neq 0) \quad (\text{П5.1})$$

и эквивалентное ему

$$(\lambda I - A)v = 0 \quad (v \neq 0). \quad (\text{П5.2})$$

Расписанное по компонентам вектора v , равенство (П5.2) представляет собой систему из n линейных уравнений относительно n неизвестных компонент v_1, \dots, v_n , причем правая часть этой системы нулевая. Если матрица системы уравнений (т.е. матрица $(\lambda I - A)$ в нашем случае) невырожденная, то единственным решением такой системы является нулевое (т.е. $v = 0$, см. §П.3). Но собственный вектор не может быть нулевым по определению, значит, решение следует искать только среди таких значений λ , для которых матрица $(\lambda I - A)$ оказывается вырожденной, т.е.

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (\text{П5.3})$$

Левая часть равенства (П5.3) представляет собой многочлен степени n , коэффициенты которого вычисляются особым образом по элементам матрицы A (коэффициент при старшей степени λ , т.е. при λ^n , равен +1, при λ^{n-1} – сумме элементов A на ее главной диагонали⁸ $\times (-1)^{n-1}$, ..., свободный член равен $\pm \det A$). Этот многочлен называется *характеристическим*, а уравнение (П5.3) называется *характеристическим* уравнением матрицы A . По общей теореме алгебры, многочлен n -ой степени имеет n (с учетом кратности) комплексных, вообще говоря, корней, или n решений уравнения (П5.3), т.е. n (с учетом кратности) собственных чисел матрицы A .

Последовательная подстановка каждого из найденных значений λ в линейную систему уравнений (П5.2) позволяет найти и все соответствующие собственные векторы v (с точностью до скалярного множителя, см. Упражнение 20а).

Современные системы вычислений обладают стандартными процедурами поиска собственных чисел и векторов заданной матрицы A , которые избавляют пользователя от необходимости выполнять рутинные шаги, изложенные выше. Например, MATLAB предлагает стандартную функцию

$$[V, D] = \text{eig}(A), \quad (\text{П5.4})$$

входным аргументом которой служит квадратная матрица A^9 , а в качестве результата функция возвращает диагональную матрицу D того же размера с собственными числами на диагонали и матрицу V , столбцы которой суть соответствующие собственные векторы (аналог матрицы V (П4.4)).

Упражнения

22. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы (П4.1) с помощью «MatLab». Из-за ошибок округления значения λ могут отличаться от целых чисел в самых младших разрядах, но почему «машинная» матрица V заметно отличается от матрицы V (П4.4)? Как можно добиться их совпадения?
23. Рассмотреть матрицу $L = \begin{bmatrix} 0 & b \\ s & 0 \end{bmatrix}$ как модель Лесли для популяции с двумя возрастными классами, где параметры s ($0 < s < 1$) и $b > 0$ суть коэффициенты дожития до второго возраста и рождаемости в этом возрасте соответственно. Найти по формулам:

⁸⁾ Эта сумма называется следом матрицы и обозначается $\text{tr } A$ (от англ. trace) или $\text{Sp } A$ (от нем. Spur). Согласно общим положениям алгебры многочленов, второй коэффициент $\times (-1)$ равен сумме корней многочлена, а их произведение – коэффициенту при свободном члене $\times (-1)^n$. Поэтому $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, а $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

⁹⁾ В синтаксисе MATLAB не используются форматы «курсив» и «жирный шрифт», принятые в данном пособии для обозначения векторов и матриц.

§П.6. Орграф, ассоциированный с матрицей. Связность и неразложимость

- степени n , контраматрицы при λ^{n-1} – суммный член равен уравнение (П5.3) общей теореме комплексных, (с учетом кратчений λ в соответствующие, см. Упражнение и процедурами которые избавляют, изложенные (П5.4))
а в качестве же размера с орой суть соотв.,
трицы (П4.1) с я λ могут отличаться «машиной»? Как можно
для популяции с $s < 1$ и $b > 0$ суть рождаемости в этом
(или $\text{Sp } A$ (от нем. «спектр») и $\times(-1)$ равен единичном члене $\times(-1)^n$.
шрифт», принятые
- a) характеристический многочлен матрицы L (проверить с помощью «MatLab»);
b) собственные значения матрицы L (как корни приведенного квадратного уравнения);
c) собственный вектор, отвечающий положительному собственному числу, и такой, что сумма его компонент равна 100 при $s = \frac{1}{2}$, $b = 8$ (проверить с помощью «MatLab»);
d) соотношение между параметрами s и b , при котором модельная популяция имеет равновесие, т.е. когда максимальное по модулю собственное число матрицы L равно 1.
24. Рассмотреть матрицу $L = \begin{bmatrix} 0 & b \\ s & r \end{bmatrix}$ как модель Лефковича для популяции с двумя стадиями развития, где параметры s ($0 < s < 1$), $b > 0$ и r ($0 < r < 1$) – коэффициенты дожития до второй стадии, рождаемости и задержки в этой стадии соответственно. Выполнить задания а)–д) из предыдущего Упражнения (в задании д) – три параметра).

§П.6. Орграф, ассоциированный с матрицей. Связность и неразложимость

Математическим обобщением разного рода схем и диаграмм, где есть какие-то категории или состояния и связи между ними, служит понятие *графа* (*graph*) – не путать с *графиком* (*plot*) функции! *Граф* состоит из конечного числа *вершин*¹⁰⁾ (*vertices*) и *ребер* (*links*), соединяющих некоторые вершины. Если ребрам приданы определенные направления, то граф называют *ориентированным* (сокращенно *орграфом*, *digraph*), а ориентированные ребра называют *дугами* (*arcs*) – вне зависимости от того, какую именно геометрическую форму они принимают в визуальном представлении орграфа.

Определение 5. Орграф, ассоциированный с матрицей $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), состоит из n вершин, занумерованных в том же порядке, и определенного числа дуг, равного числу ненулевых элементов в матрице A ; если элемент $a_{ij} \neq 0$, то соответствующая дуга имеет направление $j \rightarrow i$; если $a_{ij} = 0$, то дуги $j \rightarrow i$ в орграфе нет. \square

Часто и само значение ненулевого элемента a_{ij} – в виде числа или формальной буквы – изображают на соответствующей дуге орграфа, и тогда он называется *взвешенным*, а сами значения – *весами*.

Пример П4. На рис. П1 изображены орграфы, ассоциированные с матрицами Лесли (а) и Лефковича (б) из Упражнений 23 и 24 соответственно. \square

¹⁰⁾ Иногда вершины называют *узлами* (*nodes*).

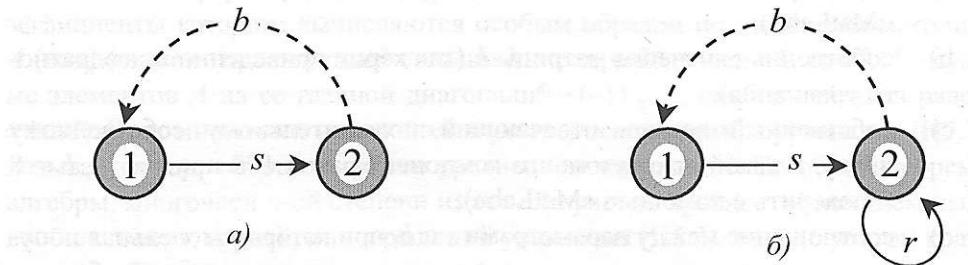


Рис. П1. Объяснения в тексте.

Определение 6. Орграф называется *сильно связным*, если для любой пары вершин $i \neq j$ существует ориентированный путь (из одной или нескольких дуг), ведущий из вершины i в j . \square

Пример П5. Орграфы на рис. П1 сильно связны. Но если вместо соответствующих им матриц рассмотреть матрицы 3-го порядка:

$$\text{а)} L = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ б)} L = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 \\ s_1 & r_2 & 0 \\ 0 & s_2 & r_2 \end{bmatrix} \quad (\text{П5.5})$$

$(0 < s_1, s_2 \leq 1; 0 \leq r_2, r_3 < 1; b_2, b_3 \geq 0),$

– то ассоциированные орграфы потеряют сильную связность, как только $b_3 = 0$ (рис. П2а, б): нет пути из вершины ③ в ① или ②. \square

Разложимые матрицы

Определение 7. Матрица A размера $n \times n$ называется *разложимой* (или *приводимой*), если перестановка некоторых ее строк и столбцов с теми же номерами приводит матрицу к блочно-диагональному виду

$$A \sim \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (\text{П6.1})$$

где диагональные блоки B и D суть квадратные матрицы порядков p и q соответственно ($p + q = n$), а правый верхний блок из нулей имеет размер $p \times q$. \square

«Перестановка строк и столбцов с теми же номерами» означает в сущности перенумерацию вершин ассоциированного с матрицей орграфа, и в Определении 7 речь идет о таком порядке строк и столбцов, при котором первые p номеров отданы вершинам, отвечающим блоку B , а последующие q номеров – вершинам блока D .

Пример П5 (продолжение). Матрицы (П5.5) при $b_3 = 0$ уже представлены в виде (П6.1):

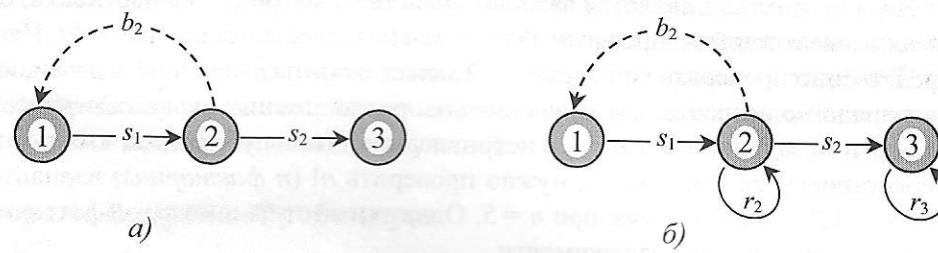
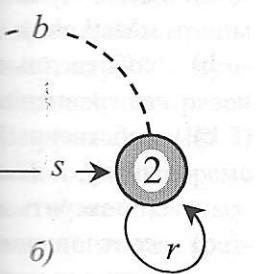


Рис. П2. Орграфы, ассоциированные с матрицами (П5.5) при $b_3 = 0$.

$$\text{а)} \quad L = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & b_2 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & s_2 & 0 \end{array} \right], \quad \text{б)} \quad L = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & b_2 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & s_2 & r_3 \end{array} \right], \quad (\text{П6.2})$$

— где $p + q = 2 + 1 = 3$. \square

Если матрица A разложима, то она, очевидно, сохраняет это свойство при умножении на любое число, — например, на (-1) , — а также при всякой арифметической операции с любой диагональной матрицей, — например, при сложении с матрицей-единицей I . Значит, матрица $(\lambda I - A)$ разложима на диагональные блоки $(\lambda I_p - B)$ и $(\lambda I_q - D)$, где I_p и I_q — матрицы-единицы порядков p и q соответственно. Известно также, что определитель разложимой матрицы равен произведению определителей ее диагональных блоков:

$$\det A = \det(B) \det(D) \quad (\text{П6.3})$$

(проверьте в «MatLab»). Для разложимой матрицы $(\lambda I - A)$ отсюда следует, что

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I_p - B) \det(\lambda I_q - D), \quad (\text{П6.4})$$

т.е. характеристическое уравнение (П5.3) распадается на два:

$$\det(\lambda I_p - B) = 0, \quad \det(\lambda I_q - D) = 0. \quad (\text{П6.5})$$

Уравнения (П6.5) означают, что *множество собственных чисел разложимой матрицы состоит из собственных чисел ее диагональных блоков*. Этот факт может облегчить поиск собственных значений заданной матрицы за счет понижения степени характеристических многочленов.

Неразложимые матрицы и критерий неразложимости

Определение 8. Матрица A называется *неразложимой* (или *неприводимой*), если она не является разложимой (приводимой) в смысле Определения 7. \square

Неразложимость является важным свойством матрицы – в частности, оно обеспечивает применение важной теоремы (см. следующий параграф). Непосредственно проверять Определение 7 может оказаться сложной задачей, когда порядок n возрастает, а *строение* (т.е. расположение нулевых/ненулевых элементов) заданной матрицы A нетривиально. Чтобы убедиться, что нужной перестановки не существует, нужно проверить $n!$ (n факториал) вариантов, т.е. $5! = 120$ вариантов уже при $n = 5$. Однако известны и более эффективные способы проверки неразложимости.

Критерий 2. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда ассоциированный с нею орграф является *сильно связным*. \square

Пример П5 с матрицами (П6.2) иллюстрирует применение критерия.

Критерий эффективен, поскольку наличие или отсутствие какого-то пути не зависит от того, как занумерованы вершины орграфа, и потому отпадает необходимость перебирать комбинаторное число перестановок «строк и столбцов с теми же номерами» из Определения 7.

Упражнения

25. Доказать, что любая положительная матрица $n \times n$ неразложима.
26. Какой размер имеет блок C в матрице (П6.1)?
27. Доказать, что любая вершина j сильно связного орграфа принадлежит некоторому *циклу*, т.е. в орграфе есть путь, ведущий из вершины j в нее же. (Указание: рассмотреть другую вершину, например, $i = 1$, и применить дважды определение сильной связности.) Каково максимальное возможное число вершин (без повторений) в таком цикле?
28. Найти собственные числа матриц L (П6.2), используя результаты Упражнений 23 и 24, соотношение (П6.5) и тот тривиальный факт, что собственное число матрицы 1×1 равно ее единственному элементу.

§П.7. Специальный класс матриц: неотрицательные квадратные матрицы

Определение 9. Матрица $A = [a_{ij}]$ размера $n \times n$ называется *неотрицательной* (положительной), если неотрицательны (положительны) все ее элементы: $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$) $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. \square

Неотрицательны матрицы в Примере П5 и вообще матрицы всех моделей динамики популяций с дискретной структурой, коль скоро их элементы суть демографические параметры, неотрицательные по определению.

В Упражнении 23.d) упомянуто максимальное по модулю собственное число матрицы L – в теории неотрицательных матриц оно обозначается $\rho(L)$ и называется *спектральным радиусом* (все собственные числа находятся внутри или на окружности радиуса $\rho(L)$ с центром в точке $(0, 0)$ комплексной

плоскости \mathbb{C}). Фундаментальное свойство неотрицательных матриц состоит в том, что их максимальное собственное число всегда действительное (а не комплексное) и положительное, и это свойство зафиксировано в теореме Перрона–Фробениуса для неотрицательных матриц – математическом основании матричных моделей динамики популяций.

Теорема Перрона–Фробениуса

Теорема. Пусть A неотрицательная неразложимая матрица $n \times n$, $A \neq 0$. Тогда:

- 1) в спектре матрицы A есть *простое* (т.е. кратности 1) положительное число λ_1 , совпадающее со спектральным радиусом: $\lambda_1(A) = \rho(A) > 0$;
- 2) существует положительный собственный вектор ($v > 0$), отвечающий собственному числу $\lambda_1 > 0$;
- 3) если в спектре A есть h значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ ($1 \leq h \leq n$), совпадающих по абсолютной величине со спектральным радиусом ($|\lambda_j| = \rho(A)$, $j = 1, \dots, h$), то все они различны и являются корнями двучлена $\lambda^h - \rho^h$, т.е. расположены в \mathbb{C} на окружности радиуса ρ с угловым шагом $360^\circ/h$;
- 4) весь спектр матрицы A , т.е. набор точек $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h, \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n\}$ в плоскости \mathbb{C} переходит в себя же при повороте плоскости на угол $360^\circ/h$.¹¹⁾ □

Положительное собственное число λ_1 называют по-разному: *перронов корень* (чаще, когда матрица A положительная), *фробениусово число* или *доминантное собственное значение*.

Замечание П2. Спектр матрицы упорядочен по убыванию абсолютной величины собственных значений ради удобства формулировок, но в системах «MatLab» порядок следования собственных чисел в результатах вычислений может меняться. □

Замечание П3. Если матрица A разложима, то применять теорему Перрона–Фробениуса следует к каждому из ее неразложимых диагональных блоков (см. Упражнение 28). □

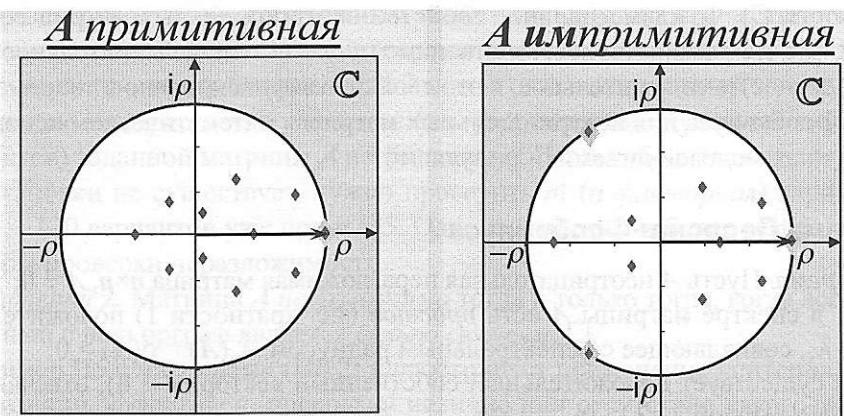
Примитивность и импримитивность

Определение 10. Величина h из пункта 3) формулировки теоремы называется *индексом импримитивности* матрицы A . Если $h = 1$, то матрица называется *примитивной*, в ином случае – *импримитивной*. □

Пример П6. Пример различий в спектре примитивной и импримитивной матриц показан на рис. П3 в комплексной плоскости \mathbb{C} . Из 11 собственных чисел на окружности радиуса $\rho = \lambda_1$ в примитивном случае лежит только одно число $\lambda_1(A)$, а в импримитивном случае таких три: λ_1 плюс пара комплексно-сопряженных чисел (индекс импримитивности h равен 3). □

Чтобы определить индекс импримитивности у заданной матрицы A , совсем не обязательно вычислять ее спектр, а достаточно обратиться к орграфу, ассоциированному с матрицей.

¹¹⁾ См., например, Маркус, Минк, 1972, §II.5.5.



$$\lambda_1 = \rho > |\lambda_j| \quad \forall j = 2, \dots, M \quad \exists |\lambda_j| = \rho \quad \forall j = 1, \dots, h \leq M$$

Рис. П3. Примеры спектра примитивной и импримитивной матрицы в комплексной плоскости.

Критерий 3. Индекс импримитивности h *неразложимой матрицы* A *равен наибольшему общему делителю* (н.о.д.) *длин всех циклов в ассоциированном с нею орграфе*¹²⁾. \square

Пример П5 (окончание). Если в матрицах (П6.2) $b_2 \neq 0$, то орграф, ассоциированный с главной подматрицей 2×2 матрицы а) (рис. П1а) состоит из одного цикла длины 2, а орграф, ассоциированный с такой же подматрицей б) (рис. П1б), – из одного цикла длины 2 и одного длины 1, т.е. н.о.д. $\{2, 1\} = 1$. Соответственно, $h = 2$ в случае а), и $h = 1$ в случае б). Найденные таким образом значения h подтверждаются результатами Упражнений 23–24: а) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{sb}$, $|\lambda_1| = |\lambda_2|$; б) $\lambda_{1,2} = (r \pm \sqrt{r^2 + 4bs})/2$, $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. \square

Чувствительность λ_1 к вариациям элементов матрицы

Каждый элемент неразложимой матрицы A как-то влияет на величину фробениусова числа λ_1 , и потому λ_1 есть функция, $\lambda_1(A)$, элементов матрицы A . Интуитивно ясно, что увеличение элементов увеличивает и значение $\lambda_1(A)$, а на математическом языке это установлено как теорема о монотонном возрастании $\lambda_1(A)$ как функции элементов A ¹³⁾. Эта функция многих переменных обладает частными производными по каждому из них, и формально монотонность выражается как

$$\partial\lambda_1(A)/\partial a_{ij} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П7.1})$$

¹²⁾ См., например, Воеводин, Кузнецов, 1984, §18.17.

¹³⁾ См., например, Гантмахер, 1967, §XIII.3, Теорема 6.

§П.7. Специальный класс матриц: неотрицательные квадратные матрицы

По смыслу частной производной это и есть «чувствительность λ_1 к вариациям» элемента a_{ij} , когда все остальные элементы остаются неизменными. Количественное выражение этой чувствительности оказывается довольно простым:

$$\frac{\partial \lambda_1(A)}{\partial a_{ij}} = v_i w_j / \langle v, w \rangle, \quad (\text{П7.2})$$

где $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ и $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ суть положительные собственные вектор-столбец и вектор-строка, отвечающие λ_1 , а $\langle v, w \rangle$ – их скалярное произведение (см. (П2.2)). Правило умножения «строку на столбец» позволяет записать выражение для *матрицы чувствительности* $S(A) = [\partial \lambda_1(A) / \partial a_{ij}]$ в виде произведения векторов:

$$S = v \cdot w / \langle v, w \rangle, \quad (\text{П7.3})$$

где слева стоит вектор-столбец v , а справа – вектор-строка w . Поэтому «строка» и «столбец» из правила умножения состоят только из одного элемента – соответствующей компоненты вектора.

Теорема Фробениуса

Пусть $A = [a_{ij}]$ неотрицательная неразложимая матрица $n \times n$, $A \neq 0$, а $\Sigma_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ – сумма элементов ее i -ой строки. Обозначим $\sigma = \min_i \{\Sigma_i\}$, $\Sigma = \max_i \{\Sigma_i\}$ – минимум и максимум среди строчных сумм.

Теорема. Значение доминантного собственного числа матрицы A находится между σ и Σ :

$$\sigma \leq \lambda_1(A) \leq \Sigma. \quad (14)$$

Если рассмотреть транспонированную матрицу A^T , то ее величины σ и Σ можно определить по столбцам матрицы A . А если вспомнить, что спектры матрицы A и ее транспоненты A^T совпадают, то получаем

Следствие. Справедлива оценка (П.7.4), где σ и Σ суть минимум и максимум среди сумм по столбцам. \square

Замечание П4. Если матрица A разложима, а под $\lambda_1(A)$ понимать максимальное из перроновых чисел ее неразложимых блоков, то утверждение Теоремы также справедливо. \square

Замечание П5. Оценки (П.7.4) невозможно улучшить, ибо есть ситуации, где $\sigma = \lambda_1(A) = \Sigma$. \square

¹⁴⁾ См., например, Маркус, Минк, 1972, §III.3.1.

¹⁵⁾ См. Упражнение 35.

Неотрицательные матрицы как «проекционные» в матричных моделях популяций

Слово «проекционные»(«projection») взято в кавычки потому, что этот стандартный термин означает в теории матриц совсем не то, что в матричных моделях популяций, а именно, матрица A (или оператор A) называется *проекционной*, если

$$A^2 = A. \quad (\text{П8.1})$$

Действительно, единожды спроектировав вектор на плоскость (или сужив оператор на некоторое подпространство), изменить результат повторным проектированием уже нельзя. А в матричных моделях популяций, т.е. в системах уравнений вида

$$x(t+1) = Ax(t), t = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П8.2})$$

с матрицей A нужной размерности, смысл «проекции» состоит в продвижении вектора $x(t)$ структуры популяции на один шаг по времени и, разумеется, $A^2 = A$, т.е. $A = I$, когда A невырожденная, может быть лишь в очень специальных случаях (Упражнение 37).

Теорема Перрона–Фробениуса (§П.7) дает инструмент для анализа *асимптотического*, т.е. при $t \rightarrow \infty$, поведения вектора $x(t)$ из модели (П8.2) при любом строении неразложимой матрицы A и любом допустимом начальном векторе $x(0)$. Если матрица A примитивна, справедливы предельные соотношения:

$$x(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow (\lambda_1)^t x^*, \quad (\text{П8.3})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \lambda_1 > 1, \\ x^*, & \text{если } \lambda_1 = 1, \\ \mathbf{0}, & \text{если } \lambda_1 < 1, \end{cases} \quad (\text{П8.4})$$

аналогичные соотношениям (1.14)–(1.15) §1.2 для частных случаев строения матрицы $A = L$. Здесь $x^* > \mathbf{0}$ есть доминантный собственный вектор, отвечающий $\lambda_1(A) = \rho(A)$, с нормой, зависящей от начального вектора $x(0)$. В импримитивном случае роль равновесной структуры x^* выполняет предельная вектор-функция $L(t; x(0))$, периодическая по t с периодом, равным индексу импримитивности или его делителю.

Изучая все сказанное выше, логику применения теоремы Перрона–Фробениуса к матрице A , заданной неотрицательной матрице A можно изобразить в виде схемы, представленной на рис. П4. Слова «единственный $x^* > \mathbf{0}$ » следует трактовать как единственность *направления*, заданного в \mathbb{R}^n доминантным собственным вектором x^* , т.е. с точностью до умножения вектора на число.

¹²⁾ См., например, §1.2.

¹³⁾ См., например, §1.2.

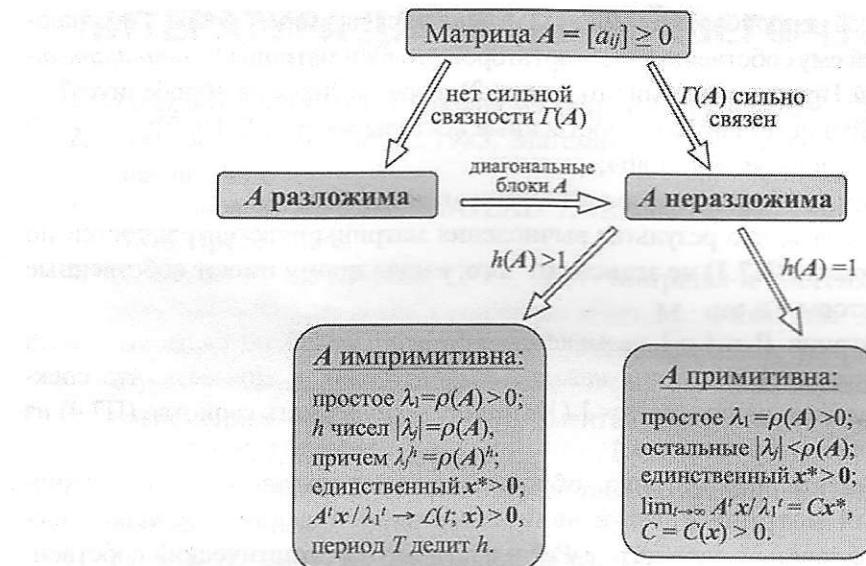


Рис. П4.

Правила применения теоремы Перрона–Фробениуса к неотрицательной матрице A общего вида с привлечением ассоциированного с нею орграфа $\Gamma(A)$ (Логофет, Клочкова, 2002).

Упражнения

29. Примитивна ли матрица U (П4.1) ?
30. Доказать достаточный признак примитивности: если хотя бы один из диагональных элементов неразложимой матрицы *ненулевой*, то матрица примитивна.
31. Чему равен индекс импримитивности матрицы $U \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, где символ \circ означает умножение матриц в смысле Адамара, т.е. поэлементно? (Указание: построить ассоциированный орграф и применить Критерий 3.)
32. Что можно сказать о размере матриц в Примере П6 ?
33. Матрица A (П1.3), очевидно, неразложима и по теореме Перрона–Фробениуса имеет $\lambda_1 > 0$ и соответствующий положительный собственный вектор. Объясните тогда *результат* следующих MATLAB-вычислений (после возврата процедуры *rand* к ее исходному состоянию):


```

>> A = rand(3), [V, D] = eig(A),
A =
    0.8147   0.9134   0.2785   0.6752   -0.7134   -0.5420   -0.1879   0   0
    0.9058   0.6324   0.5469   -0.7375   -0.6727   -0.2587   0   1.7527   0
    0.1270   0.0975   0.9575   -0.0120   -0.1964   0.7996   0   0   0.8399.
            
```

Здесь перронов корень $\lambda_1 = 1.7527$ оказался на втором месте, а отвечающий ему собственный вектор (второй столбец матрицы V) *отрицательный*. Противоречит ли это пункту 2) теоремы Перрона–Фробениуса?

33. Найти доминантные собственные векторы матриц L (П6.2):
 - a) не используя «MatLab»;
 - b) применяя символьные вычисления в «MatLab».
34. Показать, что результат вычисления матрицы чувствительностей по формуле (П7.3) не зависит от того, какую норму имеют собственные векторы v и w .
35. Матрица $P = [p_{ij}]$ называется *стохастической по столбцам*, если сумма ее элементов в каждом столбце равна 1. Доказать, что спектральный радиус $\rho(P) = 1$ (*Указание*: использовать свойство (П7.4) из теоремы Фробениуса.)
36. Доказать, что матрица, обратная к невырожденной стохастической матрице P , тоже является стохастической (*Указание*: воспользоваться равенством $Pe^* = e^*$, где e^* – стохастический собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1(P) = 1$.)
37. Предложить пример матрицы Лесли (1.8) §1.1 размера 2×2 , которая является *проекционной* в обоих смыслах (П8.1) и (П8.2). Существует ли такой пример размера 3×3 ? Среди матриц Лефковича (2.5) какого-нибудь порядка?
38. Существуют ли импримитивные матрицы Лефковича (2.5) §2.1?
39. Каков порядок матриц, чьи спектры изображены на рис. П3? (*Указание*: учесть возможность кратных собственных чисел.)
40. MATLAB-функция *round(X)* округляет каждый элемент массива X до целого числа. Как получить X с округлением до 0.1? до 0.01?

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ

1. Гантмахер Ф. Р., 1967. Теория матриц. М.: Наука. 576 с.
2. Гроссман С., Тернер Д., 1983. Математика для биологов. М.: Высшая школа. 383 с.
3. Дьяконов В. П., 2008. MATLAB 7.*/R2006/R2007: Самоучитель. М.: ДМК Пресс. 768 с.
4. Лизунова Н. А., Шкроба С. П., 2007. Матрицы и системы линейных уравнений. Руководство к решению задач. М.: Физматлит. 352 с.
5. Логофет Д.О., Белова И.Н., 2007. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 13. № 4. С. 145–164.
6. Маркус М, Минк, Х., 1972. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука. 232 с.
7. Caswell H., 2001. Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. 2nd ed. Sunderland, MA: Sinauer Associates. 722 p.
8. Logofet D.O., 1993. Matrices and Graphs: Stability Problems in Mathematical Ecology. Boca Raton, FL: CRC Press. 308pp.

Учебное издание

ЛОГОФЕТ Дмитрий Олегович
УЛНОВА Нина Георгиевна

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ В ПОПУЛЯЦИОННОЙ БИОЛОГИИ

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: Е. М. Бугачева

Компьютерная верстка: И. В. Рощина

Обложка: Д. О. Логофет

Подписано в печать 30.01.2018 г. Формат 70x100 1/16.

Усл.печл. 10,4. Тираж 100 экз. Изд. № 012.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД №00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к. Тел. 8(495) 939–3890/91. Тел./Факс 8(495) 939–3891.

Отпечатано с готового оригинал-макета

в АО «Первая Образцовая типография»

Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

Сайт: www.chpk.ru, E-mail: sales@chpk.ru, тел. 8 (499)270-73-59.

Заказ № 115